

Transformada de Fourier

1. Use a Fórmula de Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

para escrever $\cos(x)$ e $\sin(x)$ em função das exponenciais complexas e^{jx} e e^{-jx} .

2. Seja $p_a(t)$ o sinal impulso rectangular definido por $p_a(t) = \begin{cases} 1, & -a < t < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Esboce o gráfico de $p_a(t)$;

b) Determine a transformada de Fourier de $p_a(t)$;

c) Esboce o gráfico da transformada do sinal impulso rectangular $P_a(\omega)$.

3. Considere a função $f(t) = e^{-at}u(t)$, onde $u(t)$ é a função de Heaviside e a é uma constante real positiva.

a) Esboce o gráfico de $f(t)$;

b) Obtenha a transformada de Fourier da função;

c) Indique as partes real e imaginária da transformada de f .

4. Considere a função $x(t) = e^{-a|t|}$, onde $a > 0$.

a) Esboce o gráfico de $x(t)$;

b) Obtenha a transformada de Fourier da função;

c) Indique as partes real e imaginária da transformada de x .

5. Indique a transformada de Fourier das funções seguintes:

a) $f(t) = e^{-t}u(t)$

c) $f(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

b) $f(t) = e^{-3t}u(t)$

6. Esboce os gráficos e calcule a transformada de Fourier das funções/sinais seguintes.

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |t| \leq 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} mt, & |t| \leq \frac{1}{m} \\ 0, & |t| > \frac{1}{m} \end{cases} \quad \text{d) } f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2}, & -2 \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

7. Verifique a propriedade da translação na frequência

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0)$$

8. Verifique a propriedade da translação no tempo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

9. Considere o sinal impulso rectangular $p_a(t)$.

- a) Usando dualidade, encontre a transformada de Fourier do sinal $x(t) = \frac{1}{\pi t} \text{sen}(at)$;
- b) Esboce os gráficos de $x(t)$ e da sua transformada $X(\omega)$.

10. Mostre que as transformadas de Fourier das funções $x(t) = e^{at}$ e $x(t) = e^{-at}$, com $a \in \mathbb{R}^+$, não existem.

11. Calcule a transformada de Fourier das funções/sinais seguintes.

- a) $x(t) = 1$ (sugestão: use dualidade)
- d) $x(t) = \cos(\omega_0 t)$
- b) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ (sugestão: use translação)
- e) $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$
- c) $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

12. Considere o sinal $x(t) = \begin{cases} 1, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- a) Esboce o gráfico da função;
- b) Escreva a função usando o sinal impulso rectangular;
- c) Determine a transformada de Fourier da função.

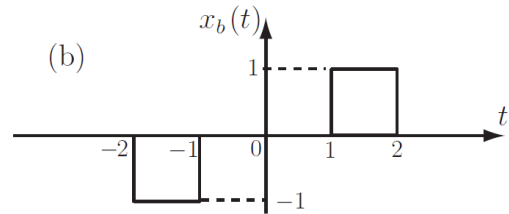
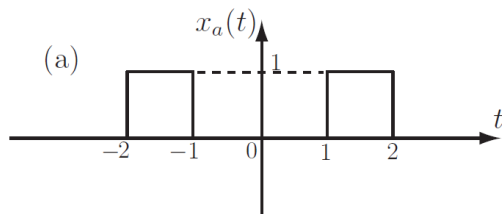
13. Verifique a propriedade da dualidade

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

14. Encontre a transformada de Fourier da função seguinte (sugestão: use dualidade).

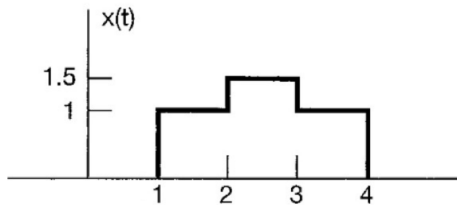
$$x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

15. Esboce o gráfico e encontre a transformada de Fourier da função $x(t) = u(-t)$.
16. Esboce o gráfico da função $x(t) = e^{at}u(-t)$, com $a > 0$. Encontre a sua transformada de Fourier.
17. Considere os sinais representados na figura.



Escreva-os usando o sinal impulso rectangular $p_a(t)$. Determine a transformada de Fourier dos sinais.

18. Considere o sinal representado na figura.



Escreva o sinal usando o sinal impulso rectangular $p_a(t)$. Determine a transformada de Fourier do sinal.

19. Determine o sinal $x(t)$ cuja transformada de Fourier é $X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$.

20. Encontre a transformada inversa de Fourier das funções

a) $F(\omega) = 4 \frac{\text{sen}(5\omega)}{\omega}$

c) $L(\omega) = 2 \frac{\text{sen}(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$

b) $G(\omega) = 4 \frac{\text{sen}(5\omega)}{\omega} e^{-j3\omega}$

d) $M(\omega) = 2 \frac{e^{j\omega}}{1 + j\omega}$

21. Recorde que $\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$. Com base nesse resultado, na dualidade e na derivação no tempo, encontre a transformada de Fourier das funções

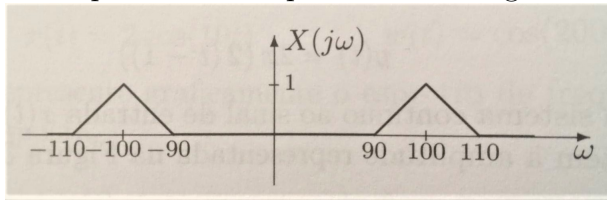
a) $f_1(t) = \frac{1}{t}$

c) $f_3(t) = \frac{1}{t^3}$

b) $f_2(t) = -\frac{1}{t^2}$

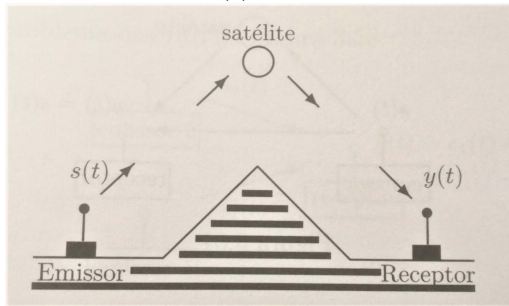
d) $f_4(t) = |t|$

22. Considere o sinal $y(t) = x(t)w(t)$ em que $w(t) = e^{j100t}$ e $x(t)$ é um sinal cujo espectro de frequência está representado na figura.



Esboce o espectro de frequência do sinal $y(t)$.

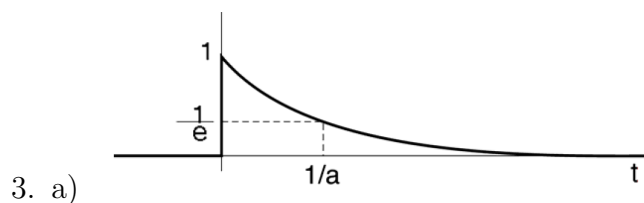
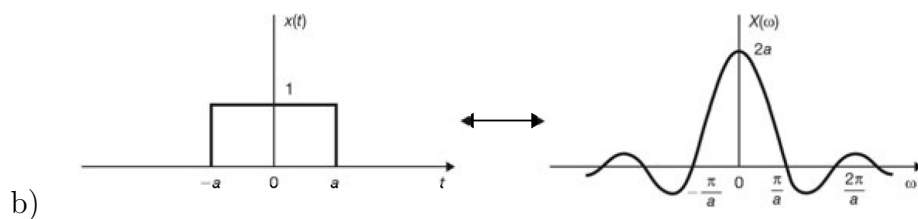
23. Considere sistema representado na figura. O sinal contínuo $s(t)$, emitido num determinado na superfície terrestre, é retransmitido no satélite e recebido noutra local com atraso τ e atenuação α . Seja $S(\omega)$ o espectro de frequência do sinal emitido. Indique o sinal recebido $y(t)$ e o seu espectro de frequência.



Soluções

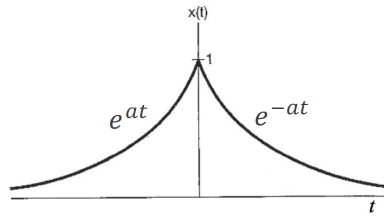
1. $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$

2. a) $P_a(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega) = 2a \operatorname{sinc}(a\omega)$



b) $F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

c) $\operatorname{Re}[F(\omega)] = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad \operatorname{Im}[F(\omega)] = -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$



4. a)

b) $X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

c) $\text{Re}[F(\omega)] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad \text{Im}[F(\omega)] = 0$

5. a) $\frac{1}{1 + j\omega}$

b) $\frac{1}{3 + j\omega}$

c) $\frac{2}{1 + 2j\omega}$

6. a) $F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(\omega)$

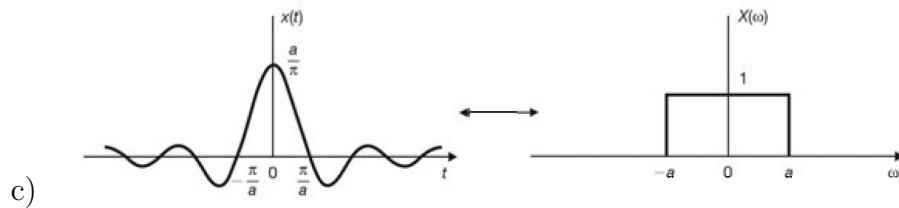
c) $F(\omega) = \frac{j}{\omega} \left[\cos\left(\frac{\omega}{m}\right) - \text{sinc}\left(\frac{\omega}{m}\right) \right]$

b) $F(\omega) = \frac{1}{2\omega} \text{sen}(3\omega)$

d) $F(\omega) = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(2\omega))$

9. a) $P_a(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(a\omega) = 2a \text{sinc}(a\omega)$

b) $X(\omega) = p_a(\omega)$



c)

11. a) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

d) $X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

b) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

e) $X(\omega) = -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

c) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

12. a) $x(t) = p_1(t - 4)$

b) $F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(\omega) e^{-j4\omega}$

14. $X(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$

15. $X(\omega) = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$

16. $X(\omega) = \frac{1}{a - j\omega}$

17. a) $x_a(t) = p_2(t) - p_1(t) \quad X_a(\omega) = 4 \text{sinc}(2\omega) - 2 \text{sinc}(\omega)$

b) $x_b(t) = p_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{3}{2}\right) - p_{\frac{1}{2}}\left(t + \frac{3}{2}\right)$

$$X_b(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{3\omega}{2}} - \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\frac{3\omega}{2}} = -\frac{4j}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

18. $x(t) = \frac{1}{2} p_{\frac{3}{2}}\left(t - \frac{5}{2}\right) + p_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{5}{2}\right)$ $X(\omega) = \frac{1}{\omega} \left[\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2 \text{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right) \right] e^{-j\frac{5}{2}\omega}$

19. $x(t) = \frac{2}{\pi t} \text{sen}(Wt)$

20. a) $f(t) = 2p_5(t)$

c) $l(t) = p_3(t)e^{j2\pi t}$

b) $g(t) = 2p_5(t - 3)$

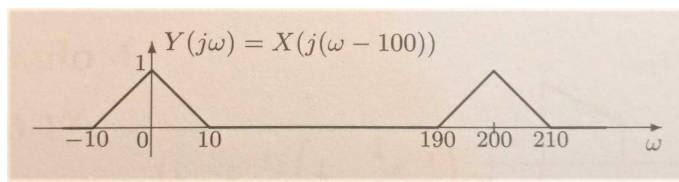
d) $m(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$

21. a) $F_1(\omega) = -\pi j \text{sign}(\omega)$

c) $F_3(\omega) = \frac{1}{4}j\pi\omega^2 \text{sign}(\omega)$

b) $F_2(\omega) = \pi\omega \text{sign}(\omega)$

d) $F_4(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$



22.

23. $y(t) = \alpha s(t - \tau)$ $Y(\omega) = \alpha e^{-j\omega\tau} S(\omega)$